

## Глава V “Алгебраические дроби”

$$\frac{a+b}{a-b}$$

Опр. Выражение  $\frac{a+b}{a-b}$  называют **алгебраической дробью**.  $a+b$  называют **числителем** дроби, а  $a-b$  - **знаменателем**.

Значения букв, при которых знаменатель не равен нулю, называют **допустимыми значениями**.

Примеры:

$\frac{a+b}{a-b}$ , числа  $a$  и  $b$  могут быть любыми, кроме случаев, когда  $a=b$ .

$\frac{a}{a(a-1)}$ , число  $a$  могут быть любыми, кроме  $a=0$  и  $a=1$ .

### Основное свойство дроби

**Дробь не изменится**, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и тоже число, отличное от нуля.

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad b \neq 0, m \neq 0$$

**Сократить дробь** - значит числитель и знаменатель разделить на их общий множитель, не равный нулю.

Примеры:

- $\frac{12a^2b}{4ab^2} = \frac{3a}{b}$
- $\frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c}; \quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}$
- $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn} = \frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m}$
- $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}$

### Общий знаменатель алгебраических дробей

**Правило:** Чтобы привести алгебраические дроби к общему знаменателю, надо:

- 1) найти общий знаменатель данных дробей;
- 2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;
- 3) умножить числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель;
- 4) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.

$$\frac{m}{6a^2b}$$

и

$$\frac{n}{15ab^2}$$

$30a^2b^2 : 6a^2b = 5b$  – доп. множитель первой дроби  
 $30a^2b^2 : 15ab^2 = 2a$  – доп. множитель и второй дроби

$$\frac{5bm}{30a^2b^2}$$

$$\frac{2an}{30a^2b^2}$$

### Сложение и вычитание алгебраических дробей

**Правило:** Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, надо знаменатель оставить прежним, а числители сложить (вычесть).

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

Примеры:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} + \frac{a-2b}{a+b} = \frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b} = \frac{4a-4b}{a+b} = \frac{4(a-b)}{a+b}$$

$$\frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b$$

**Правило:** Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, надо:

- 1) найти общий знаменатель дробей;
- 2) привести дроби к общему знаменателю;
- 3) сложить (вычесть) полученные дроби;
- 4) упростить результат, если возможно.

Примеры:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{3ab^2} = \frac{6b^2}{6a^3b^2} + \frac{3ab}{6a^3b^2} + \frac{2a^2}{6a^3b^2} = \frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}$$

$$\frac{a}{3b^2c} - \frac{c}{15ab^2} = \frac{5a^2}{15ab^2c} - \frac{c^2}{15ab^2c} = \frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}$$

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x^2-1)} + \frac{3x}{x(x^2-1)} = \frac{x+1+3x}{x(x^2-1)} = \frac{4x+1}{x(x^2-1)}$$

## Умножение и деление алгебраических дробей

**Правило:** Чтобы **умножить дробь на дробь**, нужно числитель умножить на числитель, а знаменатель на знаменатель, при необходимости сократить.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

*Примеры:*

$$\frac{1}{2xy} \cdot \frac{4x^2y^3}{5z} \cdot \frac{10z^2}{3x^3} = \frac{1 \cdot 4x^2y^3 \cdot 10z^2}{2xy \cdot 5z \cdot 3x^3} = \frac{4y^2z}{3x^2}.$$

$$\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{b^2+ab}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2} = \frac{b}{a(a-b)}.$$

**Правило:** Чтобы **разделить две обыкновенные дроби**, надо первую дробь умножить число, обратное второй дроби.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

*Пример:*

$$\frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2} = \frac{(m+n) \cdot 27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)} = \frac{(m+n) \cdot 3}{mn(m-n)(m+n)} = \frac{3}{mn(m-n)}.$$

**Правило:** Чтобы **возвести дробь в степень**, надо и числитель дроби, и знаменатель возвести в данную степень.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

*Пример:*

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}, \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$